

Sujets Type BAC - suites, limites et récurrence

EXERCICE 3 - POLYNÉSIE MAI 2022, SUJET 1 7 points

Thèmes : suites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. (a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
(b) Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

```
1. def liste(k) :  
2.     L = []  
3.     u = ...  
4.     for i in range(0, k+1) :  
5.         L.append(u)  
6.         u = ...  
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
(b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 2 - AMÉRIQUE DU NORD, MAI 2021 (7 points)

Thème : suites

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
(b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
(c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
(c) Calculer la limite de la suite (T_n) .
(d) Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C .
La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
(a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
(b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :  
    T = 180  
    n = 0  
    while T > x :  
        T = 0.955*T + 0.9  
        n = n + 1  
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 - POLYNÉSIE MAI 2022, SUJET 2 7 points**Thèmes : suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n = n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

- Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

- Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
- Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- On considère l'algorithme ci-dessus.
L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 2.

EXERCICE 4 - ASIE MAI 2022, SUJET 2**7 points**

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

- La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
 - Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
 - Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
 - Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .
- Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.
 - Justifier que la suite (p_n) est convergente.
- On appelle L la limite de la suite (p_n) .
 - Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

- Déterminer alors la limite de la suite (p_n) .

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,40769562
6	4	0,416351
7	5	0,42134371
8	6	0,42427137
9	7	0,42600433
10	8	0,42703578
11	9	0,42765169
12	10	0,42802018
13	11	0,42824089
14	12	0,42837318
15	13	0,42845251
16	14	0,42850009
17	15	0,42852863
18	16	0,42854575
19	17	0,42855602

- La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

```
1 def suite(n) :
2     p= ...
3     s=[p]
4     for i in range (...) :
5         p=...
6         s.append(p)
7     return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.